

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA

21 februarie 2016

CLASA a XI-a

1. Fie A și B două matrice distincte din $M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = B^2$.

a) **(4p)** Dacă $AB = BA$ demonstrați că $\det(A + B) = 0$.

b) **(3p)** Rămâne valabilă concluzia de la punctul a) dacă matricele A și B nu comută? Justificați răspunsul!

2. **(7p)** Fie S_5 mulțimea permutărilor de gradul 5 și e permutarea identică din S_5 .

Demonstrați că $\sigma^{60} = e, \forall \sigma \in S_5$.

3. **(7p)** Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ și $x_{n+3} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n+2} + a_{2n+1} - a_{2n}) = 0$.

a) **(5p)** Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton, demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) **(2p)** Rămâne adevărată concluzia de la punctul a) în situația când șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ nu este monoton?

Justificați răspunsul!

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.